

## Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Reconocer triángulos semejantes.
- Calcular distancias inaccesibles, aplicando la semejanza de triángulos.
- Nociones básicas de trigonometría.
- Calcular la medida de todos los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo a partir de dos datos.

Antes de empezar.

### 1. Semejanza ..... pág. 114

Teorema de Tales  
Triángulos semejantes  
Teorema de Pitágoras  
Cálculo de distancias

### 2. Razones trigonométricas ..... pág. 118

Definición  
Relaciones fundamentales

### 3. Resolución de triángulos

#### rectángulos ..... pág. 121

Dos lados  
Un cateto y un ángulo agudo  
Hipotenusa y un ángulo agudo

Ejercicios para practicar

Para saber más

Resumen

Autoevaluación



# Semejanza y Trigonometría

## Antes de empezar



Tales midió la altura de una pirámide con la sombra de una estaca.



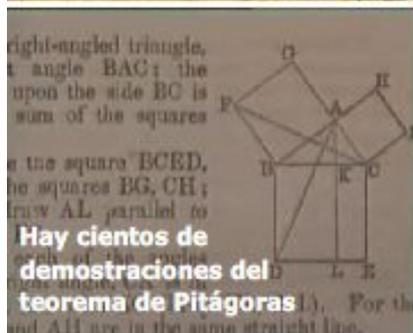
con un espejo se mide la altura de la canasta

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$$

$$\alpha = \beta$$



En la naturaleza hay orden y autosemejanza, un pétalo o una rama es igual a todas las demás



right-angled triangle, the angle BAC; the upon the side BC is sum of the squares

the square BCED, the squares BG, CH; draw AL parallel to

Hay cientos de demostraciones del teorema de Pitágoras



Los egipcios, en su afán por mejorar la agricultura desarrollaron la geometría



Una cuerda con 12 nudos era una herramienta para trazar perpendiculares



Midiendo sombras y ángulos Eratóstenes calculó el radio de la tierra hace 2200 años.



con cálculos de trigonometría se demostró que la tierra estaba achatada por los polos



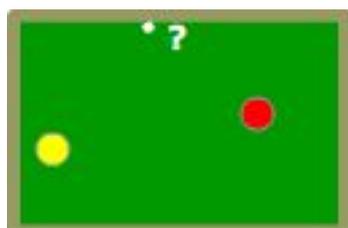
Newton



### Investiga jugando

¿Cómo hacer carambola a una banda?

Si has jugado al billar, sabrás que hacer carambola a una banda significa que la bola lanzada debe dar una vez en el marco de la mesa antes de hacer carambola. Basta aplicar la semejanza para conseguirlo, ¿Cómo?



¿Hacia donde debemos dirigir la bola amarilla para que después de rebotar en la banda vaya a la bola roja?



triángulos semejantes, carambola segura

# Semejanza y Trigonometría

## 1. Semejanza

### Teorema de Tales

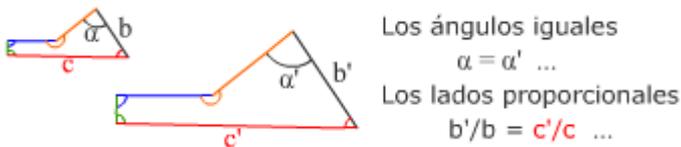
El teorema de Tales se puede ver en la derecha, afirma que cuando se cortan dos semirrectas con dos rectas paralelas, los segmentos que se obtienen en cada semirrecta guardan la misma proporción.

Este teorema nos indica que si dos triángulos tienen los ángulos iguales, los lados son proporcionales.

El recíproco también es cierto, por lo que se pueden deducir los criterios de semejanza de triángulos.

### Triángulos semejantes

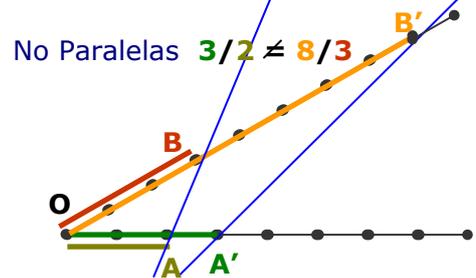
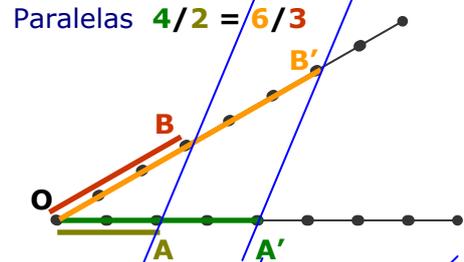
Dos figuras son semejantes si por homotecias y movimientos coinciden. En polígonos significa que los **lados** han de ser **proporcionales** y los **ángulos iguales**.



Por el teorema de Tales para que dos **triángulos** sean **semejantes** basta con que se cumpla alguno de los tres **criterios** de la derecha

Solo cuando las rectas azules son paralelas, se obtienen segmentos proporcionales

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$$



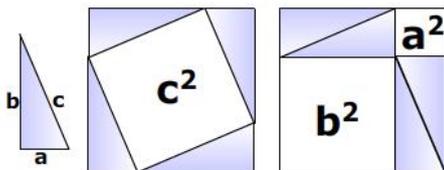
	1. Ángulos iguales (con dos basta) $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$
	2. Un ángulo igual y los lados que lo forman proporcionales $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
	3. Lados proporcionales $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

### Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras dice que en un triángulo rectángulo, de catetos a y b, y de hipotenusa c, se cumple que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

La imagen es una demostración gráfica del teorema.

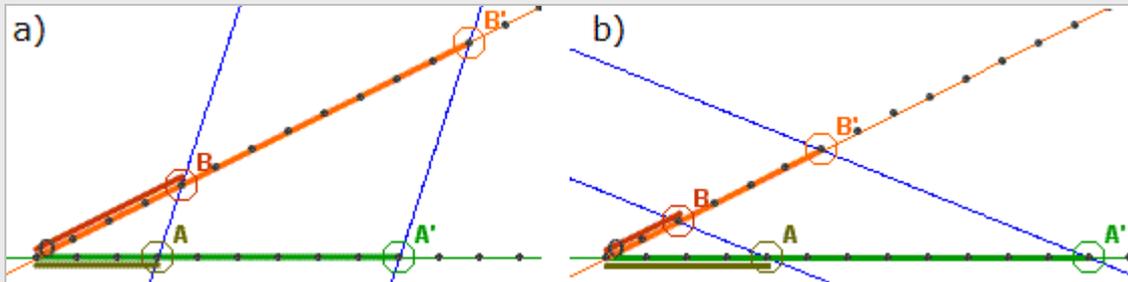


En la derecha vemos algunas aplicaciones de este teorema, utilizado calcular hipotenusas, catetos, distancias entre puntos y ecuaciones de circunferencias.

<p><math>x = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10</math></p>	<p><math>x = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6</math></p>
<p><math>d = \sqrt{(8-2)^2 + (9-2)^2}</math></p>	<p><math>(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2</math></p>

## EJERCICIOS resueltos

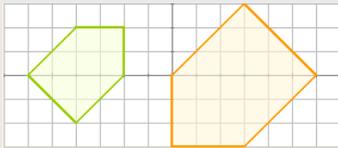
1. Halla en los casos a) y b) las proporciones  $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$  y  $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$



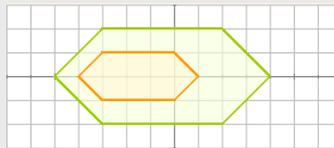
Soluciones: a)  $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$  y  $\frac{9}{3} = \frac{12}{4}$       b)  $\frac{4}{2} = \frac{12}{6}$  y  $\frac{12}{4} = \frac{6}{2}$

2. Contesta razonadamente:

- a) ¿Son semejantes?



Sí, puesto que los lados están en proporción  $\frac{2}{3}$  y los ángulos son iguales.



No, los ángulos son iguales pero los lados no son proporcionales.



No, los ángulos no son iguales.

- b) Un triángulo con un ángulo de  $30^\circ$  y otro de  $40^\circ$  ¿es forzosamente semejante a un triángulo con un ángulo de  $30^\circ$  y otro de  $110^\circ$ ?

Sí, pues como los ángulos de un triángulo suman  $180^\circ$ , se concluye que los ángulos de los dos triángulos son iguales y por el criterio 1, son semejantes.

- c) Un triángulo de lados 3, 6 y 7 cm, ¿es semejante a otro cuyos lados miden 9, 36 y 49 cm?

No, pues los lados no son proporcionales.

- d) Un cuadrilátero de lados 3, 4, 5 y 6 cm ¿es necesariamente semejante a otro de lados 6, 8, 10 y 12 cm?

No, pues aunque los lados son proporcionales, en polígonos de más de tres lados esto no basta para que ocurra la semejanza, han de ser además los ángulos iguales.

- e) Dos triángulos que tienen un ángulo de  $20^\circ$  y los lados que los forman en uno miden 6 y 15 cm, en otro, 4 y 10 cm ¿Son semejantes?

Sí, por el segundo criterio, ya que la proporción entre los lados que forman el ángulo igual es en ambos casos  $\frac{2}{5}$ .

# Semejanza y Trigonometría

## EJERCICIOS resueltos (continuación)

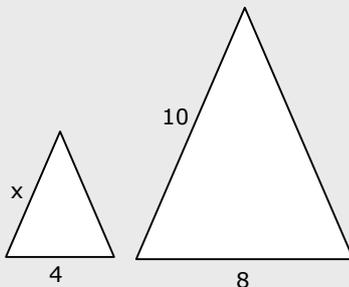
f) Dos polígonos regulares con el mismo número de lados, ¿son semejantes?

Sí, los ángulos son iguales,  $(n^\circ \text{ de lados} - 2)180^\circ / n^\circ$  de lados, y los lados, proporcionales.

g) Los lados de dos triángulos miden 3, 6 y 7cm, en uno, y  $\sqrt{18}$ ,  $\frac{12}{\sqrt{2}}$  y  $7\sqrt{2}$  en otro. ¿Son semejantes?

Sí, pues los lados son proporcionales:  $\sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}$ ;  $\frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$   
y en triángulos basta con esta condición (criterio 3)

3. Los triángulos de la figura son semejantes, halla la medida del lado x



$$\frac{x}{4} = \frac{10}{8} \Rightarrow x = 5$$

4. Halla la altura del árbol



$$\frac{x}{2,16} = \frac{1,4}{0,84} \Rightarrow x = 2,16 \cdot \frac{1,4}{0,84} = 3,6$$

5. Calcula la hipotenusa en el triángulo de la figura (la solución se ve dando la vuelta a la hoja)

Por el T. de Pitágoras

$$x^2 = 6^2 + 12^2$$

Realizamos los cuadrados

$$x^2 = 81 + 144$$

Ahora sumamos

$$x^2 = 225 \Rightarrow x = \sqrt{225}$$

$$x = 15$$

6. Calcula el cateto en el triángulo de la figura (la solución se ve dando la vuelta a la hoja)

Por el T. de Pitágoras

$$x^2 = 11^2 - 7^2$$

Realizamos los cuadrados

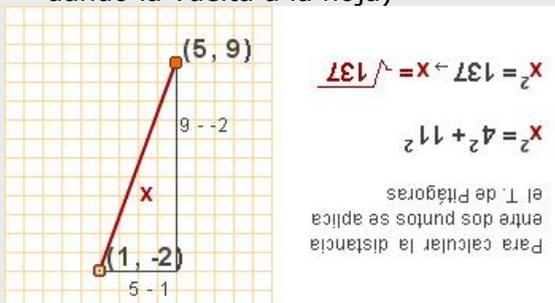
$$x^2 = 121 - 49$$

Ahora sumamos

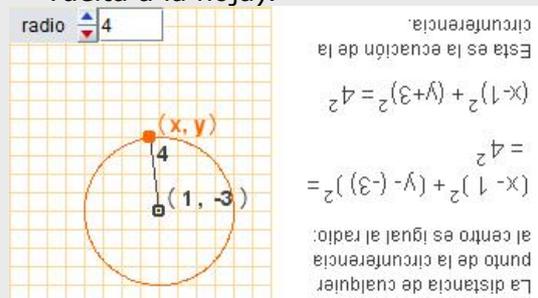
$$x^2 = 72 \Rightarrow x = \sqrt{72}$$

## EJERCICIOS resueltos (continuación)

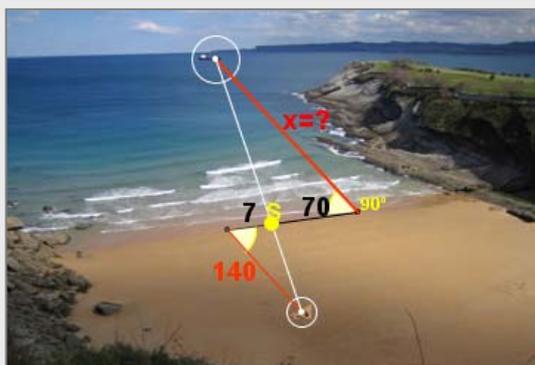
7. Calcula la distancia entre los dos puntos de la figura (la solución se ve dando la vuelta a la hoja)



8. Calcula la ecuación de la circunferencia de la figura (la solución se ve dando la vuelta a la hoja).

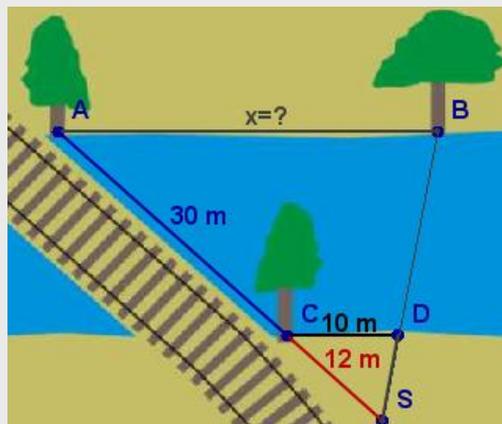


9. Para calcular la distancia desde la playa a un barco se han tomado las medidas de la figura. Calcula la distancia al barco.



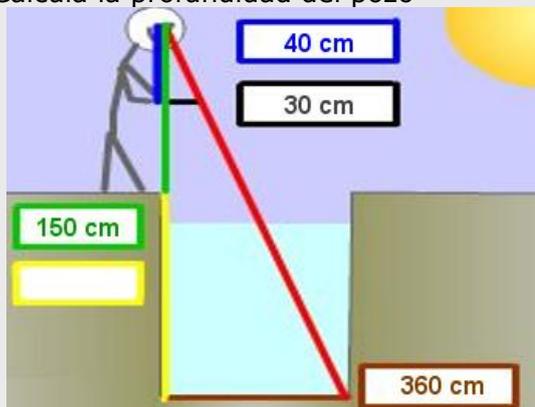
$$\frac{x}{140} = \frac{7}{140} \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 140}{7} = 1400 \text{ m}$$

10. Calcula la distancia entre los árboles A y B.



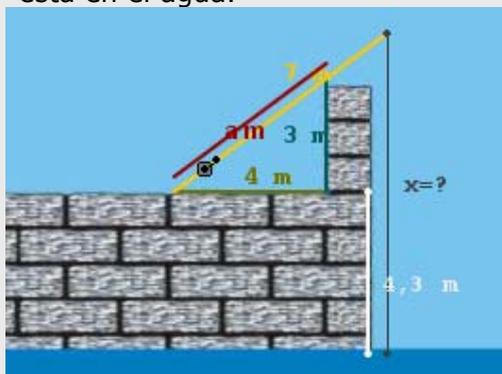
$$\frac{x}{30 \text{ m} + 12 \text{ m}} = \frac{10 \text{ m}}{12 \text{ m}} \Rightarrow x = \frac{420}{12} \text{ m} = 35 \text{ m}$$

11. Calcula la profundidad del pozo



$$\frac{x + 150}{360} = \frac{40}{30} \Rightarrow x + 150 = \frac{360 \cdot 40}{30} \Rightarrow x = 330$$

12. Halla la longitud x del sedal que no está en el agua.



Por el T. De Pitágoras  $a=5$  y por T. de Tales

$$\frac{x - 4,3 \text{ m}}{7 \text{ m}} = \frac{3 \text{ m}}{5 \text{ m}} \Rightarrow x - 4,3 \text{ m} = \frac{21}{5} \text{ m} \Rightarrow x = 8,5 \text{ m}$$

# Semejanza y Trigonometría

## 2. Razones trigonométricas

### Definición

La razón o cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo determina su forma.

Estas razones, denominadas razones trigonométricas, se resumen en la tabla siguiente,

Razones trigonométricas	seno	coseno	tangente
Abreviaturas	<b>sen</b>	<b>cos</b>	<b>tg</b>

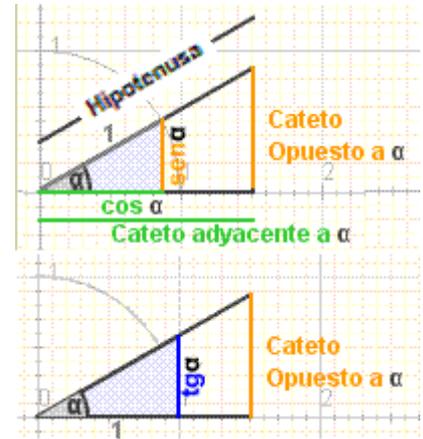
$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

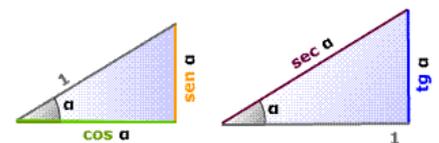
$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Son importantes también las razones inversas así la razón de la hipotenusa entre el cateto adyacente se llama secante, memoriza los triángulos de la derecha que serán muy útiles para resolver triángulos más adelante

Triángulos semejantes, misma razón = misma forma



semejantes  $\frac{\text{sec } \alpha}{1} = \frac{1}{\text{cos } \alpha}$

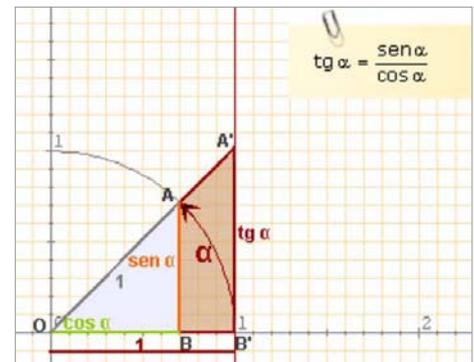


### Relaciones fundamentales

Si se aplican la semejanza y el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos "básicos", es decir, con hipotenusa=1 o con cateto adyacente=1, se obtienen las relaciones fundamentales de la trigonometría:

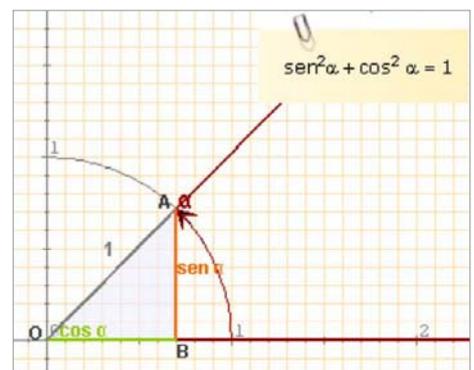
Los triángulos OBA y OB'A' son semejantes:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\text{tg } \alpha}{1} \quad \text{luego} \quad \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$$



Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo OBA de la figura obtenemos:

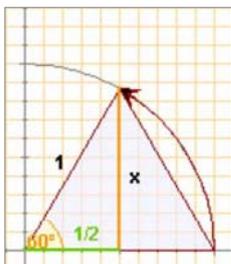
$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$



# Semejanza y Trigonometría

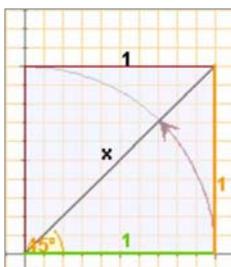
En un triángulo equilátero los ángulos miden **60°**. Con el Teorema de Pitágoras se calcula la altura

$$x = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



En un cuadrado de lado **1** con el Teorema de Pitágoras se calcula la diagonal

$$\text{diag} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



## Razones de 30°, 45° y 60°

Los ángulos de 30°, 45° y 60° aparecen con bastante frecuencia, fíjate cómo se calculan sus razones a partir de la definición si buscamos los triángulos adecuados.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$

Memorizar esta tabla es fácil si observas el orden que guardan. Una vez aprendidos los senos con las raíces consecutivas, los cosenos salen en orden inverso.



## Con la calculadora

- Dado un ángulo  $\alpha$  obtener sus razones trigonométricas.

Por ejemplo el  $\text{sen } 28^\circ 30'$

Pon la calculadora en modo **DEG**

Teclea  $28 \text{ } ^{\circ} \text{ } ' \text{ } '' \text{ } 30 \text{ } ^{\circ} \text{ } ' \text{ } '' \text{ } \text{sin}$

Obtenemos: **0,477158760**

En algunas calculadoras hay que pulsar la tecla **sin** antes de introducir el ángulo, comprueba cómo funciona la tuya.

Si queremos obtener el  $\text{cos } \alpha$  ó la  $\text{tg } \alpha$  procederemos de la misma forma pero pulsando las teclas **cos** y **tan** respectivamente.

- Dada una razón obtener el ángulo  $\alpha$  correspondiente.

Con el mismo valor que tienes en la pantalla: **0,477158760**

Comprueba que la calculadora sigue en modo **DEG**

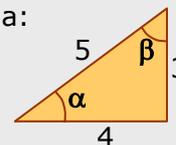
Teclea **SHIFT sin**

Obtenemos: **28,5** en grados, si queremos grados, minutos y segundos, pulsamos **SHIFT**  $\text{ } ^{\circ} \text{ } ' \text{ } ''$  obteniendo **28° 30''**

## EJERCICIOS resueltos

13. En el triángulo de la figura calcula:

- a)  $\text{sen } \alpha$       d)  $\text{sen } \beta$   
 b)  $\text{cos } \alpha$       e)  $\text{cos } \beta$   
 c)  $\text{tg } \alpha$         f)  $\text{tg } \beta$



- a)  $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5} = 0,6$       d)  $\text{sen } \beta = \frac{4}{5} = 0,8$   
 b)  $\text{cos } \alpha = \frac{4}{5} = 0,8$       e)  $\text{cos } \beta = \frac{3}{5} = 0,6$   
 c)  $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4} = 0,75$       f)  $\text{tg } \beta = \frac{4}{3} = 1,3$

14. Obtén con la calculadora:

- a)  $\text{sen } 30^\circ = 0,5$   
 b)  $\text{cos } 60^\circ = 0,5$   
 c)  $\text{tg } 45^\circ = 1$

15. Obtén con la calculadora los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  del ejercicio 5.

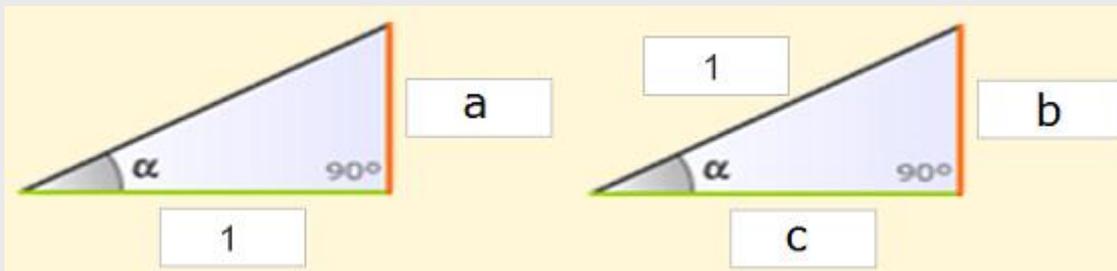
$\alpha$ : Tecleamos  $0 \text{ } . \text{ } 6 \text{ } \text{SHIFT} \text{ } \text{sin} \rightarrow 36,87^\circ$

$\beta$ : Tecleamos  $0 \text{ } . \text{ } 8 \text{ } \text{SHIFT} \text{ } \text{sin} \rightarrow 53,13^\circ$

Observa que en efecto suman  $90^\circ$ .

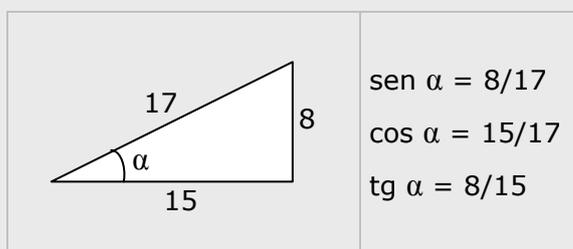
## EJERCICIOS resueltos

16. Decide qué razones del ángulo  $\alpha$  corresponden a los lados  $a$ ,  $b$  y  $c$

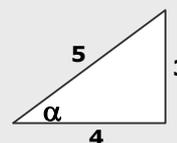


Solucion  $a = \operatorname{tg} \alpha$        $b = \operatorname{sen} \alpha$        $c = \operatorname{cos} \alpha$

17. En el siguiente triángulo calcula el  $\operatorname{sen} \alpha$ ,  $\operatorname{cos} \alpha$  y  $\operatorname{tg} \alpha$



18. Comprueba en el ángulo  $\alpha$  del triángulo de la figura que se cumplen las relaciones fundamentales



$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} = \operatorname{tg} \alpha$$

19. Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo  $\alpha$  tal que  $\operatorname{sen} \alpha = 0,3$

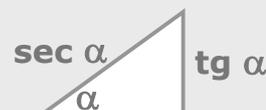
$$\operatorname{cos}^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \Rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 - 0,3^2 = 1 - 0,09 = 0,81 \Rightarrow \operatorname{cos} \alpha = \sqrt{0,81} = 0,9$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{0,3}{0,9} = \frac{1}{3}$$

20. Comprueba que se cumple la relación:  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{sec}^2 \alpha$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}\right)^2 = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha} = \operatorname{sec}^2 \alpha$$

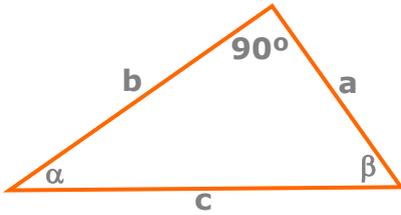
Recuerda el triángulo:



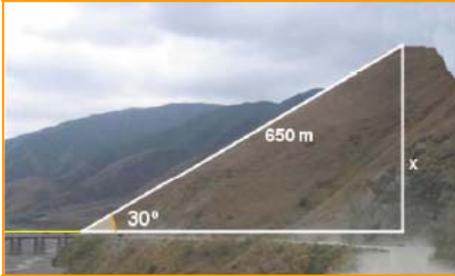
## 3. Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo es calcular los datos desconocidos, lados o ángulos, a partir de los conocidos.

Veamos los casos que se pueden presentar.



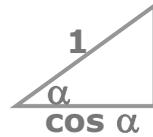
Calcular la altura del monte.



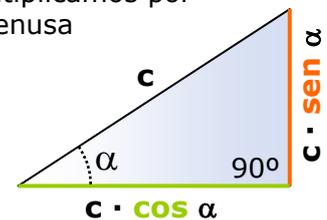
$$x = 650 \cdot \text{sen } 30^\circ = 650 \cdot 0,5 = 325$$

### a) Conocidos un ángulo y la hipotenusa

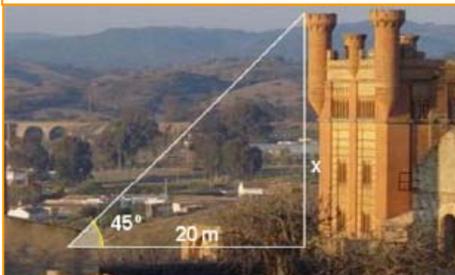
Para hallar los catetos de un triángulo rectángulo del que se conocen las medidas de la **hipotenusa** y de un ángulo agudo, pensaremos en el triángulo:



que multiplicamos por la hipotenusa



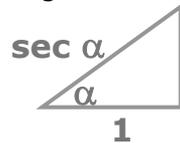
Calcular la altura de la torre.



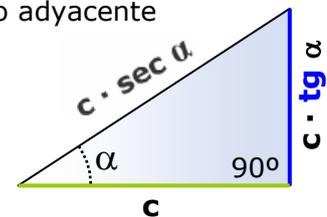
$$x = 20 \cdot \text{tg } 45^\circ = 20 \cdot 1 = 20\text{m}$$

### b) Conocidos un ángulo y un cateto

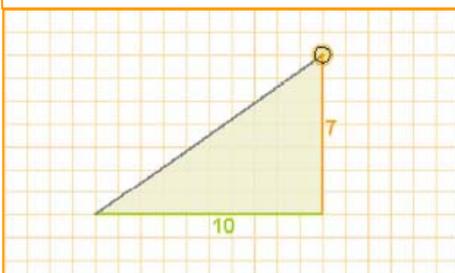
Para hallar los lados de un triángulo rectángulo del que se conocen las medidas un **cateto** y de un ángulo no recto, pensaremos en el triángulo:



que multiplicamos por el cateto adyacente



Resolver el triángulo.



$$\text{hipotenusa} = \sqrt{7^2 + 10^2} = \sqrt{149}$$

Con la calculadora:  $\text{atan}(0,7) = 35^\circ$   
Y el otro ángulo:  $90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

### c) Conocidos dos lados

Para hallar el otro lado del triángulo se aplicará el teorema de Pitágoras, el ángulo se determinará como

el arco cuya tangente es  $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

o bien como el arco cuyo seno es  $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

dependiendo de los datos iniciales.

Para calcular el otro ángulo basta restar de  $90^\circ$ .

# Semejanza y Trigonometría

## EJERCICIOS resueltos

21. Calcula las pulgadas y el formato de una pantalla cuya base mide 64 cm y su altura 36 cm



Para hacer este ejercicio debes saber que **1 cm = 0.39 pulgadas** y **formato de pantalla = tg(α)**  
 Así en una pantalla de **25 pulgadas** en formato **16:9**  
**tg(α)=16/9** y su **diagonal** mide 25 pulgadas. Ejercicio

### Solución



Por el teorema de Pitágoras, la diagonal mide en cm:

$$\sqrt{64^2 + 36^2} = \sqrt{3600} = 60$$

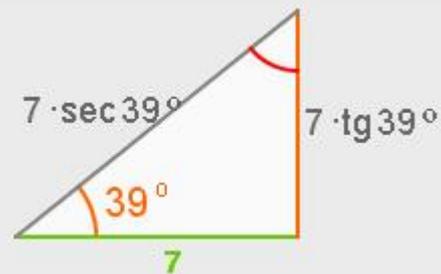
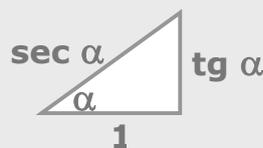
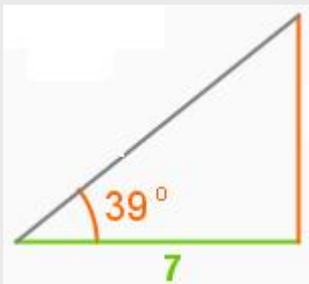
Lo que en **pulgadas** es  $60 \cdot 0,39 = \mathbf{23,4}$

La tangente de  $\alpha$ ,  $\frac{64}{36}$  simplificada da  $\frac{16}{9}$

**16:9** es el formato de la pantalla.

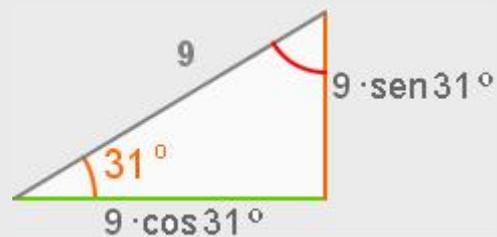
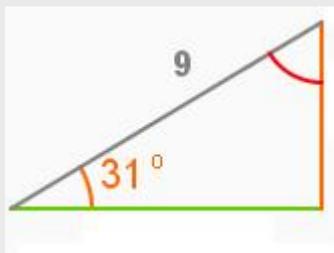
22. En el siguiente triángulo rectángulo calcula la medida de sus lados y de sus ángulos.

Solución: el otro ángulo es de  $90^\circ - 39^\circ = 51^\circ$ .  
 Utilizamos el triángulo básico de la tangente para calcular los otros lados



23. Resuelve el triángulo de la figura.

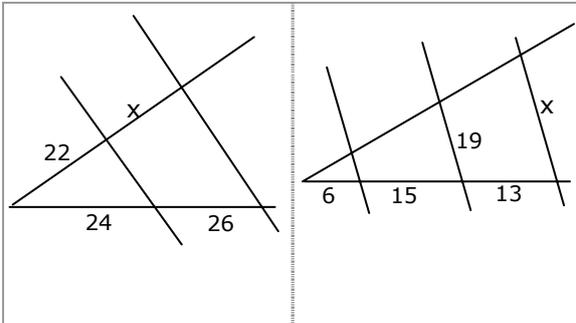
Solución: el otro ángulo es de  $90^\circ - 31^\circ = 59^\circ$ .  
 Utilizamos el triángulo básico del seno para calcular los otros lados





## Para practicar

1. Halla  $x$  en cada caso



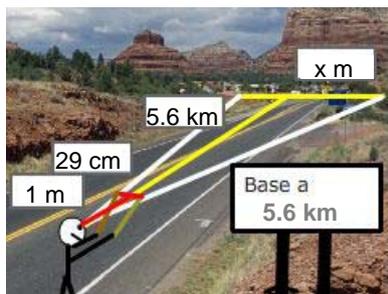
2. Las medidas de tres lados homólogos de dos cuadriláteros semejantes son:

4 cm	$x$ cm	7 cm
20 cm	10 cm	$y$ cm

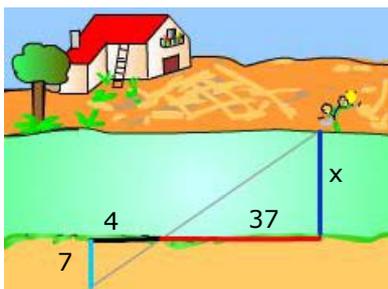
Halla  $x$  e  $y$

3. La base de un monte se observa a una distancia de 5,6 km. Se mueve una regleta de 29 cm hasta cubrir con ella visualmente la base y en ese momento la distancia de la regleta al ojo del observador es de 1 m.

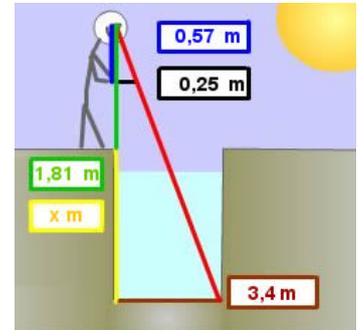
Calcula la anchura de la base del monte.



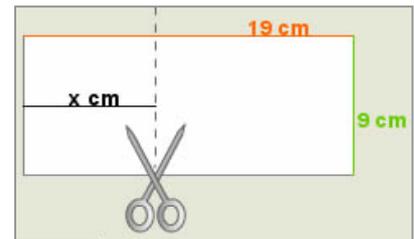
4. Calcula la anchura del río.



5. Calcula la profundidad del pozo.



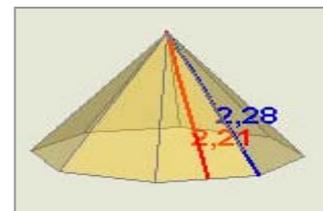
6. ¿Por dónde se ha de cortar la hoja para que el trozo de la izquierda sea semejante a la hoja entera?



7. Dibuja en tu cuaderno un triángulo con un ángulo de  $69^\circ$  y uno de los lados que lo forman de 9 cm. ¿Son semejantes todos los triángulos que cumplen estas condiciones?

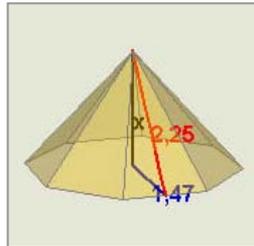
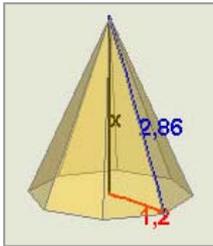
8. Dibuja en tu cuaderno un triángulo con un ángulo de  $56^\circ$  y el cociente de los lados que lo forman igual a 3. ¿Son semejantes todos los triángulos que cumplen estas condiciones?

9. Calcula el lado de la base de la pirámide.

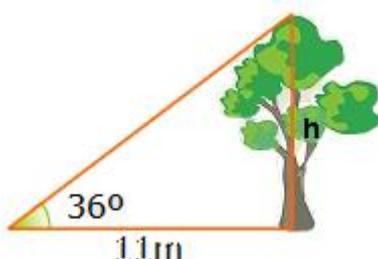


# Semejanza y Trigonometría

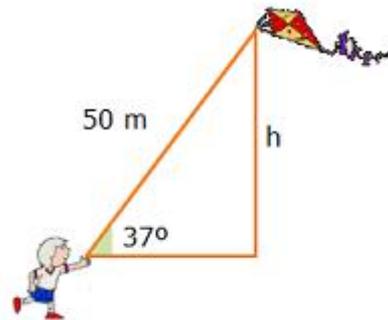
10. Calcula la altura de la pirámide en cada caso.



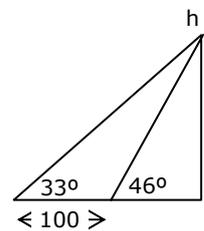
11. Halla la distancia entre los puntos  $(-3, 4)$  y  $(5, -2)$ .
12. Ecuación de la circunferencia de centro  $(0, -1)$  y radio 3.
13. Halla con la calculadora las siguientes razones trigonométricas:  
a)  $\sin 30^\circ$  b)  $\cos 67^\circ$  c)  $\operatorname{tg} 45^\circ$
14. Un ángulo de un triángulo rectángulo mide  $47^\circ$  y el cateto opuesto 8 cm, halla la hipotenusa.
15. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 26 cm y un ángulo  $66^\circ$ . Calcula los catetos.
16. Un ángulo de un triángulo rectángulo mide  $44^\circ$  y el cateto adyacente 16 cm, calcula el otro cateto.
17. El cos de un ángulo agudo es  $\frac{3}{4}$ , calcula el seno del ángulo.
18. La tangente de un ángulo agudo es  $\frac{12}{5}$  calcula el seno.
19. El  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  y  $\alpha$  es un ángulo agudo, calcula la  $\operatorname{tg} \alpha$ .
20. La apotema de un polígono regular de 9 lados mide 15 cm, calcula el lado.
21. El lado de un exágono regular mide 30 cm, calcula la apotema.
22. La sombra de un árbol cuando los rayos del sol forman con la horizontal un ángulo de  $36^\circ$ , mide 11m. ¿Cuál es la altura del árbol?.



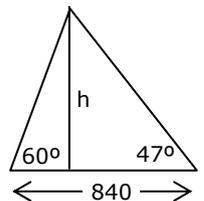
23. El hilo de una cometa mide 50 m de largo y forma con la horizontal un ángulo de  $37^\circ$ , ¿a qué altura vuela la cometa?.



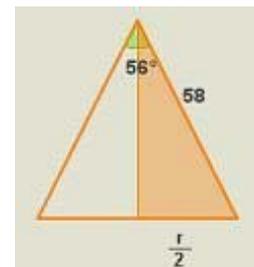
24. Para medir la altura de un edificio se miden los ángulos de elevación desde dos puntos distantes 100m. ¿cuál es la altura si los ángulos son  $33^\circ$  y  $46^\circ$ ?



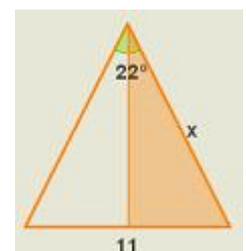
25. Dos personas distantes entre sí 840 m, ven simultáneamente un avión con ángulos de elevación respectivos de  $60^\circ$  y  $47^\circ$ , ¿a qué altura vuela el avión?.



26. Con un compás cuyos brazos miden 58 cm, trazamos una circunferencia. Si el ángulo que forman sus brazos es  $56^\circ$ . Cuál es el radio de la circunferencia?

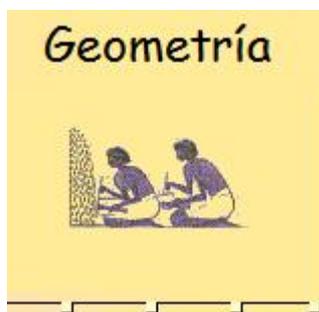


27. Con un compás trazamos una circunferencia de 11 cm de radio. Si el ángulo que forman sus brazos es de  $22^\circ$ . Cuál es la longitud de los brazos del compás?





### Geometría griega



La tradición atribuye a Tales (600 años antes de nuestra era) la introducción en Grecia de la geometría egipcia.

Tales fue un precursor sobre todo preocupado de problemas prácticos (cálculo de alturas de monumentos con ayuda de un bastón y de la proporcionalidad de las sombras).

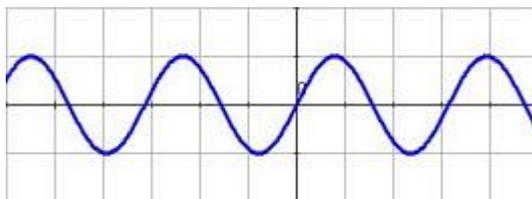
La geometría griega que fue un éxito asombroso de la ciencia humana dando pruebas de un ingenio excepcional, estuvo marcada por dos Escuelas: la de Pitágoras y la de Euclides.

Ver más en:

[http://perso.orange.fr/therese.eveilleau/pages/hist\\_mat/textes/h\\_geom.htm](http://perso.orange.fr/therese.eveilleau/pages/hist_mat/textes/h_geom.htm)

### Los sonidos

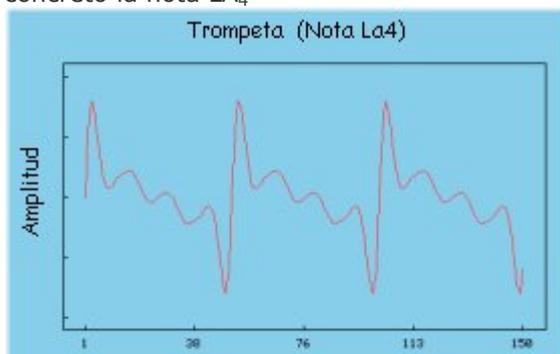
Si has utilizado algún programa de sonido probablemente habrás visto que este se representa por ondas. Las ondas son funciones trigonométricas, que representan puntos de la forma  $(x, \text{sen}x)$ :



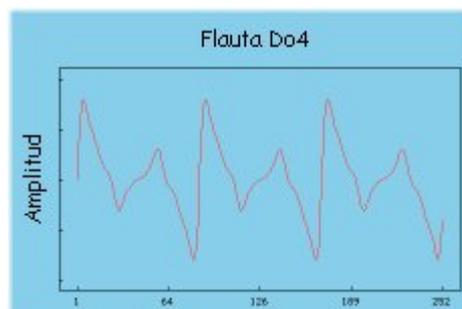
En la página interactiva "para saber más" a la que corresponde este texto puedes construir con una gráficadora diversas ondas. En esa misma página puedes encontrar un programa con el que producir distintos sonidos con una misma nota y ver su gráfica.

**La forma de onda** es la característica que nos permitirá distinguir una nota de la misma frecuencia e intensidad producida por instrumentos diferentes. La forma de onda viene determinada por los armónicos.

Forma de onda (o timbre) de la trompeta, en concreto la nota  $LA_4$



Forma de onda (o timbre) de una flauta, la nota  $DO_4$



Se recomienda visitar la página <http://www.xtec.es/centres/a8019411/caixa/ondas.htm>

# Semejanza y Trigonometría



## Recuerda Lo más importante

### Polígonos semejantes

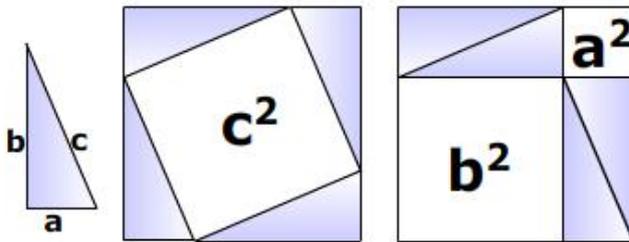
Si tienen y los lados proporcionales y los ángulos iguales.

### Triángulos semejantes

En el caso de los triángulos basta que se cumpla uno de los tres criterios:

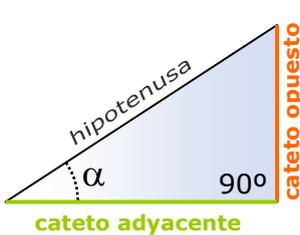
1. Ángulos iguales (con dos basta)  
 $\hat{A} = \hat{A}'$  y  $\hat{B} = \hat{B}'$
2. Un ángulo igual y los lados que lo forman proporcionales  
 $\hat{A} = \hat{A}'$  y  $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
3. Lados proporcionales  
 $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

### Teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$



Teorema de Tales

$r, s$  paralelas  $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$



- ✓ El **seno** es el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa.
- ✓ El **coseno** es el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa.
- ✓ La **tangente** es el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

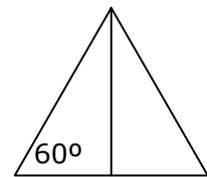
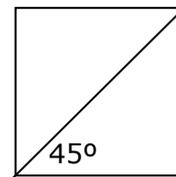
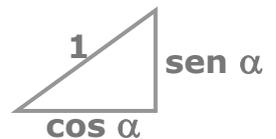
$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

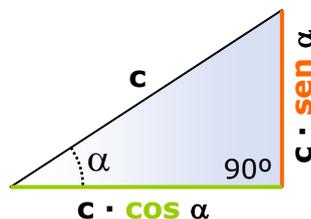
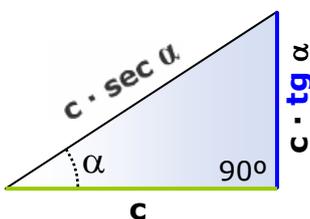
$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} \quad \text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

### Relaciones fundamentales



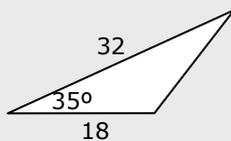
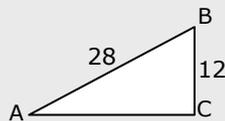
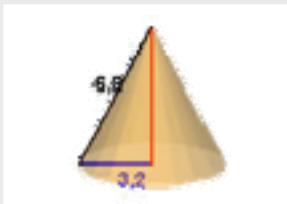
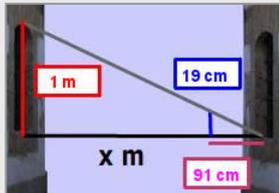
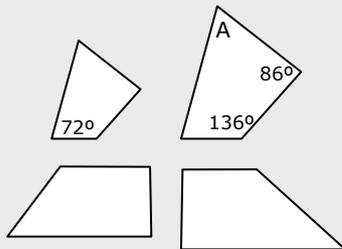
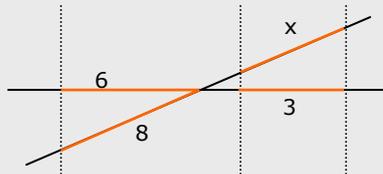
	30°	45°	60°
seno	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
coseno	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$



**Resolver** un triángulo rectángulo consiste en hallar las medidas de sus seis elementos: tres lados y dos ángulos (el tercero es 90°), conocidos un lado y un ángulo o dos lados.

# Semejanza y Trigonometría

## Autoevaluación



1. Aplica la semejanza para calcular el valor de  $x$ .
2. Sabiendo que los ángulos de un cuadrilátero suman  $360^\circ$ , calcula el ángulo A.
3. Los polígonos de la figura, ¿son semejantes?.
4. Como la ventana de la casa de enfrente es igual que la mía puedo saber su altura, y con la visual de una varilla calcular la anchura de la calle. Calcúlala.
5. La generatriz de un cono recto mide 6,8 cm y el radio de la base 3,2 cm. Halla la altura de un cono semejante a éste realizado a escala 1:2.
6. Calcula el valor de  $\operatorname{tg} A$  en el triángulo ABC de la figura.
7. Calcula el área del triángulo de la figura.
8. Si  $\operatorname{sen} \alpha = 0,8$ , y  $\alpha$  es un ángulo agudo, calcula la  $\operatorname{tg} \alpha$ .
9. La altura de Torre España es de 231 m, ¿cuánto mide su sombra cuando la inclinación de los rayos del sol es de  $30^\circ$ ?
10. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 4cm.

# Semejanza y trigonometría

## Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a)  $143/6$  b)  $646/21$

2.  $x=2$   $y=35$

3. 1624 m

4. 64,75

5. 5,94 m

6. 4,26 cm

7. No tienen porqué ser semejantes

8. Son semejantes

9. 1,12

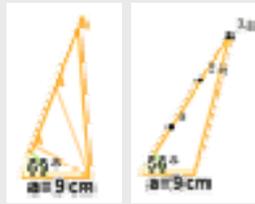
10. 1,70

11. 97,98 m

12.  $x^2 + (y-1)^2 = 9$

13. a) 0,5 b) 0,39 c) 1

14. 10,94cm



Prob. 7

Prob.8

15. 23,75 cm y 10,58 cm

16. 15,45 cm

17. 0,66

18.  $12/13$

19.  $3/4$

20.  $1^{\circ},92$  cm

21. 25,98 cm

22. 7,99 m

23. 30,09 m

24. 174,16 m

25. 556,34 m

26. 54,46 cm

27. 22,82 cm

## Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 4

2.  $66^{\circ}$

3. No son semejantes

4.  $91/19$  m = 4,78 m

5. 3 cm

6. 0,47

7. 165,19  $u^2$

8.  $4/3$

9. 400,10 m

10. 6,93  $cm^2$